Mathématiques pour l'agrégation
Algèbre et Géométrie - Rombaldi

Réduction des endomorphismes normaux

106 158
151 153
154 160
155 161

Définition : Soit E un $\mathbb{R}$-ev, muni d'un p.s. $\langle . | . \rangle$.
Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si : $u^* \circ u = u \circ u^*$.

Exemple : $S(E)$; $A(E)$; $O(E)$ sont des ensembles d'endomorphismes normaux.

Lemme : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ endomorphisme normal et F sous-ev de E stable par u.
Alors : $F^\perp$ est stable par u.

Preuve :

- Si $F = \{0\}$ ou $F = E$, alors : $F^\perp = E$ ou $F^\perp = \{0\}$ et cet espace est bien stable par u.
- Supposons alors $n := \dim(E) \geq 2$ et $1 \leq \dim(F) \leq n-1$.
Comme F est stable par u, dans une base orthonormée adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$, la matrice de u est de la forme : $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$ et celle de u^* est ${}^tA = \begin{pmatrix} {}^tA_1 & 0 \\ {}^tA_2 & {}^tA_3 \end{pmatrix}$.
Puisque u normal, on a : $A\,{}^tA = \begin{pmatrix} A_1{}^tA_1 + A_2{}^tA_2 & A_2{}^tA_3 \\ A_3{}^tA_2 & A_3{}^tA_3 \end{pmatrix}$
${}^tAA = \begin{pmatrix} {}^tA_1A_1 & {}^tA_1A_2 \\ {}^tA_2A_1 & {}^tA_2A_2 + {}^tA_3A_3 \end{pmatrix}$
Ainsi, $\mathrm{Tr}(A_2{}^tA_2) = 0$ ce qui équivaut à $A_2 = 0$ car $(A;B) \mapsto \mathrm{Tr}(A{}^tB)$ est un produit scalaire.
Alors $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$ et $F^\perp$ est stable par u.

Lemme : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ endomorphisme (pas forcément normal)
Alors : il existe un sous-espace vectoriel P de E de dimension 1 ou 2 stable par u.

Preuve :

- Si u a une vp réelle λ, alors pour tout vecteur propre associé $x \in E \setminus \{0\}$, la droite $D = \mathbb{R}x$ est stable par u.
- Sinon, supposons $n := \dim(E) \geq 2$ et u sans vp réelle.
Le polynôme minimal π_u se décompose dans $\mathbb{R}[X]$: $\pi_u(X) = (X^2+bX+c)Q(X)$ avec $Q(u) \neq 0$.
Puisque $0 = \pi_u(u) = (u^2+bu+c)Q(u)$ et $Q(u) \neq 0$, l'endomorphisme (u^2+bu+c) n'est pas injectif i.e. son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$.
Soit alors $x \in \mathrm{Ker}(u^2+bu+c)$ et $P = \langle x ; u(x) \rangle$.
Ainsi, P est de dimension 2 puisque $\{x ; u(x)\}$ est libre (car sinon, u admettrait une vp réelle) et P est stable par u car $u^2 = -bu - c\,id$.

Lemme : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ endomorphisme normal.
Alors : il existe des sous-ev de E : $P_1 ; \dots ; P_r$ de dimension 1 ou 2, deux à deux orthogonaux, stables par u tq :
$$E = \bigoplus_{j=1}^{r} P_j$$

Preuve :
Par récurrence sur la dimension $n := \dim(E)$.

* Initialisation : Pour $n=1$ ou $n=2$ OK
* Hérédité : Supposons le résultat vrai pour tout endomorphisme normal sur un espace euclidien de dimension $p \in [\![1 ; n-1]\!]$ avec $n \geq 3$. Soit $n \geq 3$.

Par le lemme, soit P_1 sous-ev de E de dimension 1 ou 2 stable par u et par le lemme, $P_1^\perp$ est aussi stable par u.
Comme $1 \leq n-2 \leq \dim(P_1^\perp) \leq n-1$, par hypothèse de récurrence, il existe $P_2 ; \dots ; P_r$ sous-ev de $P_1^\perp$ de dimension 1 ou 2, deux à deux orthogonaux, stables par $u_{|P_1^\perp}$ tels que $P_1^\perp = \bigoplus_{j=2}^{r} P_j$.
Ainsi, $E = P_1 \oplus P_1^\perp = \bigoplus_{j=1}^{r} P_j$.

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ endomorphisme normal
Alors : il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E tq :
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} D_p & & (0) \\ & R_1 & \\ (0) & & \ddots \; R_r \end{pmatrix}$ avec D_p matrice diagonale, $R_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$ et $b_k \neq 0$ tels que $p + 2r = n$.

Preuve :
Par récurrence sur la dimension $n := \dim(E)$.

* Initialisation : Pour $n=1$, OK

Pour $n=2$.

- Si u a une vp réelle λ_1, alors il existe un $\vec{vp}$ unitaire e_1 tel que $u(e_1) = \lambda_1 e_1$.
Par le lemme, comme $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ est une droite stable par u, il existe un vecteur unitaire e_2 orthogonal à e_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tq : $u(e_2) = \lambda_2 e_2$.
Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\{e_1;e_2\}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.
- Si u n'a pas de vp réelle, alors soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de u dans une base orthonormée $\mathcal{B}$.
Puisque u est normal, $\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$
Ainsi, $b = \pm c$ et $(a-d)(b-c) = 0$.
  - Si $b = 0$, alors $c = 0$ et A diagonale. ABSURDE car on a supposé u sans vp réelles.
  - Si $b = c$, alors A symétrique et $\chi_A(X) = X^2 - (a+d)X + ad - b^2$ de discriminant $(a+d)^2 - 4(ad-b^2) = (a-d)^2 + 4b^2 \geq 0$ donc χ_A admet deux racines réelles. ABSURDE car on a supposé u sans vp réelles.

Alors : $b = -c \neq 0$ et $a = d$.

* <u>Hérédité</u> : Supposons le résultat vrai pour les endomorphismes normaux sur les espaces euclidiens de dimension $p \in [\![2 ; n-1]\!]$ avec $n \geq 3$.
Soit $n \geq 3$.

▲ Si u admet une vp réelle λ_1, <u>alors</u> pour tout vecteur propre unitaire e_1 associé, le sous-ev $H_1 = (\mathbb{R} e_1)^{\perp}$ est stable par u.
Puisque $1 \leq \dim(H_1) \leq n-1$, par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_1$ de H_1 <u>tq</u> : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u_{|H_1}) = \begin{pmatrix} D_p & & & \\ & R_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_r \end{pmatrix}$.
Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\{e_1\} \cup \{\mathcal{B}_1\}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u_{|H_1}) \end{pmatrix}$.

▲ Si u n'a pas de vp réelles, <u>alors</u> par le lemme, il existe $P_1, \dots, P_r$ sous-ev de E de dimension 1 ou 2, deux à deux orthogonaux, stables par u <u>tq</u> : $E = \bigoplus_{j=1}^{r} P_j$.
Ainsi, pour tout $j \in [\![1 ; r]\!]$, il existe une base $\mathcal{B}_j$ de P_j tq : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_j}(u_{|P_j}) = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} =: R_j$ (car u n'admet pas de vp réelle).
Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r}(u) = \begin{pmatrix} R_1 & & \\ & \ddots & \\ & & R_r \end{pmatrix}$.

Temps avec slides
15,05 ([illegible]) !
14,59 "

Temps :
13' 30" speechless